# 拓扑相之小史 | 诺奖深度解析（终结篇）

原创 2016-11-15 刘正鑫, 孟子杨 中科院物理所

**（系列文章之终结篇）**

**拓扑相之小史**

刘正鑫（中国人民大学），孟子杨（中科院物理所）

自从Haldane phase 和量子Hall 效应被发现之后，关于拓扑相和拓扑相变的研究已经成为了凝聚态物理学中的一个重要方向。经过实验和理论物理学家三十多年的不懈努力，这些方面的研究取得了令人瞩目的成果。今年10 月初Thouless、Haldane、Kosterlitz 因他们在拓扑物态和拓扑相变方面的贡献而获得了Nobel 物理奖,之后不久，拓扑相领域的两个大神级领导者A. Kitaev 和文小刚又被授予2017 年凝聚态物理学领域的最高奖之一Buckley 奖，实乃众望所归。一时间, 物理学不同领域乃至社会各界都渴望了解拓扑相中的堂奥。我们不才,就用这篇短文, 大致按照时间顺序, 介绍一下拓扑序和对称保护拓扑序的概念及其发展历程。

## 内禀拓扑序

上个世纪80 年代量子Hall 效应的发现是人们认识非传统物质形态的开端，特别是具有分数电荷激发的分数量子Hall 效应的发现，更是让人们认识到传统的Landau-Ginzburg-Wilson 以对称性破缺为基石的凝聚态理论的不足。随后，在手征自旋液体的理论研究中也发现分数量子激发Kalmeyer and Laughlin [1987], Wen et al. [1989]。为了理解以自旋液体和量子Hall 态为代表的新奇物质形态，1989 年文小刚将超弦理论中的思想引入到凝聚态物理并首次提出了(内禀) 拓扑序的概念Wen [1989]，他用拓扑序来标识由拓扑量子场论描述的拓扑相，具有拓扑序的相具有以下特点：(1) 基态没有对称破缺，其简并度依赖于空间（即底流形）的拓扑结构；(2) 基态和激发态之间具有有限的能隙；(3) 元激发准粒子在交换下服从分数统计。比如填充数为1/3的Laughlin 分数量子霍尔液体，其激发态有能隙, 基态在球面流形上基态简并度为1 而在轮胎面流形上简并度为3。其中的准粒子激发带着1/3单位电荷，交换两个准粒子系统获得的相位是 $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ，也就是说准粒子服从分数统计。这样的元激发有一个诗意的名字–任意子(anyon)。我们知道自然界中的全同粒子分为玻色子和费米子两种，分别服从Bose-Einstein 统计和Femi-Dirac 统计，也就是说交换两个全同粒子，前者波函数不变而后者波函数反号。任意子是介于玻色子和费米子之间的全同粒子，是凝聚态关联电子系统里低能下涌现出来的产物。任意子可以对易，也可以非对易，比如在某些特殊的分数量子霍尔态中可能存在Ising 类型

Moore and Read [1991] 或者更广泛的比如Fibonacci 类型的非对易任意子激发Wen [1991]。交换两个非对易任意子，整体波函数不是获得一个相位而是变成了另一个量子态。任意子的一个应用前景是用于进行拓扑量子计算Kitaev [2003]。为了实现通用型的拓扑量子计算，需要用到支持非对易任意子激发的拓扑序。值得一提的是，大家相对较熟悉的Ising 类型的任意子(其性质与拓扑超导中的Majorana 零模有些类似) 不能用来实现通用型量子计算，而最简单的能用来实现通用量子计算的任意子是Fibonacci 类型任意子Wen [1991]。

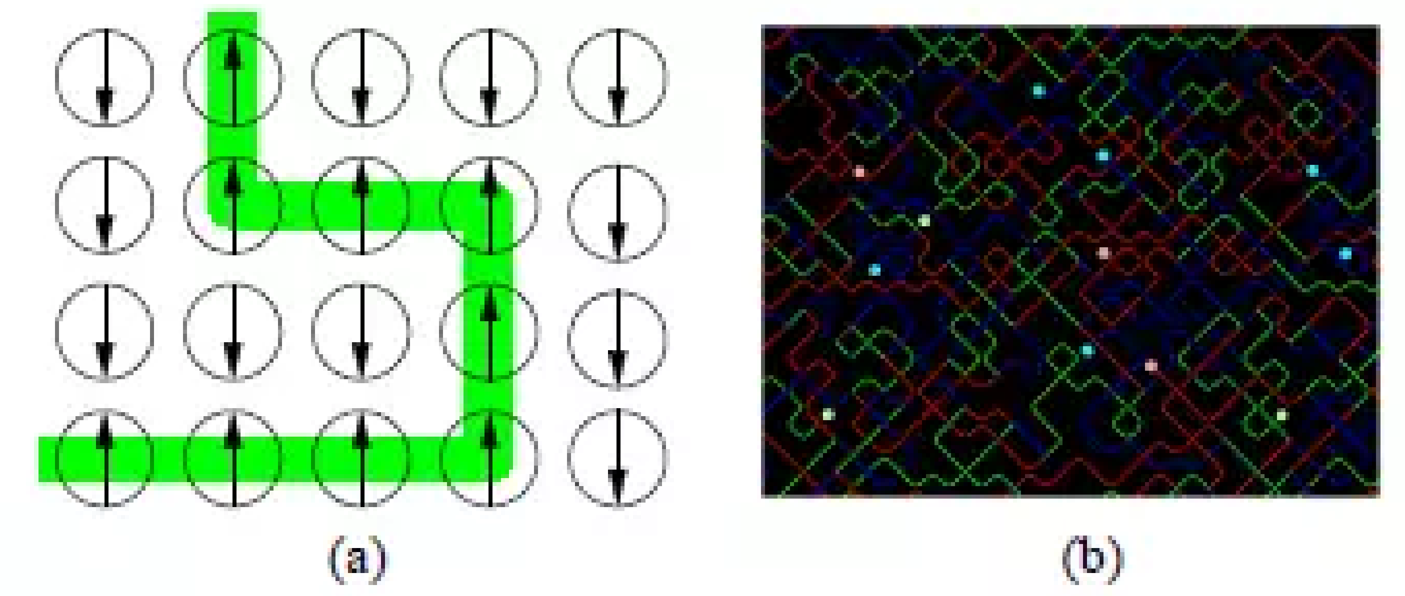



**图1: 拓扑序的弦网凝聚图像。(a) 弦的物理含义，可理解为方向朝下的自旋背景下方向朝上的自旋之间的连线，这些弦在不停的涨落变化；(b) 弦网凝聚态携带拓扑序，弦的端点即分数激发（图片来源于文小刚主页）。**

内禀拓扑序研究的一大进展是Kitaev 的toric code 模型Kitaev [2003, 2006] 和文小刚、Michael Levin 的弦网 凝聚模型(现在被称为Levin-Wen model） Levin and Wen [2005] 的提出。这些二维空间中的严格可解格点模型，使抽象的拓扑序乃至非对易拓扑序更易于理解。在Levin-Wen 的弦网凝聚模型中，弦是局域自由度的某种集体形态，比如图1 (a) 中方向朝上的自旋的集合，这些弦不停地涨落和运动，描述了多体自由度的纠缠，文小刚曾形象的将其比作面汤[如图1 (b), 虽然这碗面汤看起来有点后现代:) ]。如果量子态具有拓扑序，则存在长度和系统宏观尺度相比拟的长弦, 弦的涨落和运动满足Maxwell 方程，系统的低能物理由演生的规范场描述。在基态中，弦都是闭合的。若弦被断开，则端点代表了服从分数统计的激发。如果基态中存在很长的弦，则长弦断开后两个端点处的分数激发可以被分开很远的距离，物理上叫解禁闭。反之，如果基态中不存在与系统尺度相当的长弦，则分数激发被禁闭（也就是不能在空间上被分开），从而系统不具有拓扑序，属于平凡的量子相。内禀拓扑序的完整的描述需要引入新的数学对象–张量范畴论（张量范畴论首次出现在一维的共形场论中，二维拓扑序中再次用到范畴论不是偶然的，这里面蕴含了边界态和内部态的某种全息的对应关系), 而拓扑序的进展反过来又极大的推动了相关的数学的发展, 这是理论物理和数学的再一次美好交融。

2005 年左右开始的拓扑绝缘体（以及后来的拓扑超导体）的研究, 更是掀起了拓扑物态研究的大潮(见本系列中戴希老师的文章诺奖深度解析（之二、之四、之六）)。自从拓扑绝缘体的概念提出以后，实验和理论包括计算物理学家建立了大规模的合作，各种学术会议、学术文章铺天盖地，各路学术明星和新秀纷纷登场，各种漂亮的材料、实验数据和华丽的理论也如珠光玛瑙般琳琅满目。拓扑这一生僻的术语从此更是变成了凝聚态物理甚至科研新闻中的流行词汇（其中有些概念常被混用，也带来一些副作用，不过目前大家已经开始注意到这些问题。在最近的文献中, 如Wen [2016]，研究人员已开始澄清一些容易混淆或有争议的概念）。

那么什么是拓扑绝缘体呢？通常的绝缘体是指常温下不导电的物体。绝缘体之所以不导电，是因为系统中电子的激发有能隙。不过，系统的边界或者表面上的电子可以通过偶然出现的无能隙的激发而导电。这些偶然的无能隙的激发不稳定，容易被微扰所破坏。当系统遵守时间反演和电荷守恒两种对称性的时候，存在一种特殊的绝缘体即拓扑绝缘体，如果保持其边界不发生对称性破缺则边界总是导电的。而且这一特性不依赖于材料的几何形状，只要对称性不被破坏就是稳定的。二维空间和三维空间中都存在拓扑绝缘体，一维空间中如果没有更多的对称性则不存在拓扑绝缘体。虽然名字叫拓扑绝缘体，但其实对称性才是最关键的。如果对称性被破坏，则边界的导电特性将会被破坏，“拓扑”也就无从谈起。除了边界态的特殊性之外，拓扑绝缘体的另一个特征是其分类不是整数种，而是两种（即所谓的 $Z_2$ 分类）！两种相的区别是指奇和偶的区别，奇数代表非平庸的拓扑绝缘体，而偶数则代表平庸的绝缘体。其物理含义是说，如果把奇数个拓扑绝缘体堆积并耦合起来，则最后得到的仍然是一个非平庸的拓扑绝缘体；而如果把偶数个拓扑绝缘体耦合起来，则最终结果是一个平庸的绝缘体。这些奇特的性质是凝聚态物理里面从来没有出现过的，因而在理论和实验方面，都吸引了人们强烈的研究兴趣。

拓扑绝缘体是自由费米子（无相互作用）系统中拓扑相的一个特例。一个自然的问题是，如果系统中具有其他的对称性，类似的拓扑相是否也存在？如果存在，共有多少种？这些不同的拓扑相之间的关系又如何？幸运的是，这些问题不用逐个模型进行研究，理论物理学家找到了有力的数学工具对不同对称性、不同空间维度下的自由费米子的拓扑相的分类进行了统一的描述。这一数学工具便是同伦论(homotopy)，也就是从实空间向目标空间（比如描述自由费米子能量的Hamiltonian 的参数空间）的连续映射的种类决定了拓扑相的种类Kitaev [2009], Ryu et al. [2010], Wen [2012]，而这些映射之间的相对关系则描述了不同拓扑相之间的关系。自由费米子拓扑相的分类理论犹如一个列车时

刻表，预言了与拓扑绝缘体类似的一大族拓扑绝缘相和拓扑超导相，对相关的理论和实验研究（比如材料计算、物理性质预测以及实验实现等）起到了非常重要的指导作用。

这些都是自由费米子系统中的拓扑相，如果加上相互作用，这些拓扑相会发生什么改变？具有相互作用的费米系统比无相互作用的费米系统要困难的多。原因是无相互作用的系统，其复杂度随系统的尺度变大而呈幂次增加，而加上相互作用之后，其研究的复杂度的随系统的尺度变大而呈指数增加！而要研究宏观的物质的相需要外推到热力学极限，也就系统尺度是无穷大的情况。解决问题的突破口是Fidkowski and Kitaev [2010,2011]2010 年左右在一维相互作用的费米性拓扑相分类中的一个重要工作。一维拓扑相的特别之处是存在简并的边界态。Kitaev 和Fidkowski 阐明，只要某自由费米子拓扑相的边界态的简并在相互作用下保持稳定，则拓扑相是稳定的；否则，如果相互作用能解除某拓扑相边界的简并，则此拓扑相被相互作用所破坏，或者说相互作用使得这个拓扑相连续地转变为平庸的相。这样，在相互作用下拓扑相的分类问题归结为研究边界态的稳定性问题。由于一维系统的边界态是零维的，因此问题被大大简化！一个具体的例子是，一维具有时间反演对称性的无相互作用的拓扑超导的分类是Z（即整数，有无穷多个拓扑相），但在不改变对称性的前提下加上各种允许的短程相互作用以后，其分类塌缩为 $Z_8$ （即只剩下8 个拓扑相）。所有8 的倍数标记的拓扑相在相互作用下全都成为平庸相；同理，所有除以8 的余数相同的整数所代表的无相互作用拓扑相在加上相互作用后合并为同一个相。这个漂亮的工作打开了相互作用系统中拓扑相的分类的大门，并启发了人们开始把相互作用系统中的拓扑相分类推广到高维系统。

## 对称保护拓扑序，短程纠缠与长程纠缠

除了相互作用的影响之外, 另一个基本问题是, 同样是拓扑相，自由费米子的拓扑相(比如拓扑绝缘体)，和前面提到的具有内禀拓扑序的拓扑相（比如分数量子霍尔态)，他们本质的区别是什么？相互作用的玻色性系统中的拓扑相是否也有这种区别呢？为了系统回答这些问题，让我们回到Haldane phase。上一篇文章(诺奖深度解析（之三)) 提到，自旋为1 的Haldane phase 基态无磁序而且具有有限能隙、隐藏对称破缺（弦序参量）和分数自旋的边界态，是早期被发现的拓扑相之一。一直以来，Haldane phase 都被认为具有内禀拓扑序。事实果真是这样的吗？直到2009 年，顾正澄和文小刚用张量运算的方法重新研究了Haldane phase，才澄清了这个问题。他们发现Haldane phase 其不动点波函数和一个平庸的态具有类似的结构Gu and Wen [2009]，这意味着Haldane phase 并没有内禀拓扑序！他们进一步发现，其实Haldane phase 的非平凡拓扑性质也是受对称性保护的，与自由费米子系统中的拓扑绝缘体类似。如果去掉对称性，则Haldane phase 与平庸相合并为同一个相，或者说没有对称性则没有了Haldane phase。基于这一发现，他们正式提出了对称保护拓扑序

(symmetry protectedtopological order, 简称SPT 序) 的概念，具有这种序的相即SPT 相。对称保护拓扑序是从已知的具体例子中抽象出一般性的概念，现在回过头来看是很自然的、水到渠成的事，但第一次提炼出这样具有普适性的概念，却是需要直觉和洞察力的。有了一般性的概念做指导，SPT 相作为拓扑相中的一种，迅速发展了起来。

Haldane phase 和拓扑绝缘体都是SPT 相的典型的例子。拓扑绝缘体由时间反演对称性和电子数守恒对称性来保护。Haldane phase 由什么对称性来保护呢？顾正澄和文小刚的文章之后不久，Pollmann et al. [2010] 用纠缠谱的方法进一步研究了Haldane phase 的稳定性，确定了Haldane phase 由 $Z_2 \times Z_2$ 自旋旋转对称性，或者时间反演对称性，或者空间反演对称性来保护。只要上述对称性有一个被保持，则Haldane phase 就可以作为一个对称性保护拓扑相而稳定的存在。

从现象上看，内禀拓扑序支持分数激发而对称保护拓扑序不支持分数激发，而两者的本质区别是它们多体量子纠缠的形式不一样。对于这样区别的认识来自在量子信息的思想(关于量子信息在凝聚态物理中的体现,见范桁老师的上一篇文章: 诺奖深度解析（之五）)。根据前面弦网凝聚的图像，如果基态中存在与系统尺度相当的不断涨落的长弦，也就是说具有长程纠缠，则分数激发解紧闭，系统具有拓扑序；反之，如果系统不存在宏观尺度的长弦，则只具有短程纠缠，分数激发被禁闭，系统属于平凡相。但是，具有短程纠缠的量子态也并非完全平庸。如果具有某些对称性，则也可能存在某些由对称性保护的非平庸的拓扑性质。这些对称性保护的非平庸的短程纠缠量子相正是SPT 相！如果我们把物质的拓扑态比作量子毛衣，编织毛衣的毛线（相当于弦网模型中的弦）可以不断涨落，即这些毛线会不断地消失并以另外的形态重现。具有对称保护拓扑序的量子毛衣全部由短毛线按照系统对称性的约束（比如对于Haldane phase，我们需要用双线）编织而成，而具有内禀拓扑序的量子毛衣除了需要短毛线之外还需要长毛线，长毛线的最大长度与毛衣的尺度相当。对于短线编织的量子毛衣，我们可以在破坏对称性的情况下连续地把量子毛衣拆解为互不相连的短毛线（对应于平庸的量子直积态），而对于后者我们却做不到这一点。用物理的语言来说，判别量子态究竟具有哪种纠缠的方法就是看能否够通过局域幺正变换(相当于有限深的量子线路) 将其变为一个平庸的直积态，如果是则为短程纠缠态，如果不是则为长程纠缠态Chen et al. [2011a]。

有趣的是，同获Buckley 奖的拓扑相的两位领袖Kitaev 和文小刚，他们对长程纠缠的定义是不完全一致的。上面通过局域幺正变换定义的长程纠缠的是文小刚的定义。按照这个定义，整数量子Hall 态由于具有无能隙的手征边界态，从而是长程纠缠的，因为手征边界态不能通过局域幺正变换来去除掉。而Kitaev 认为只有支持分数激发的有能隙的态才具有长程纠缠，因此整数量子Hall 态被认为是短程纠缠的。从场轮的术语来说，两者的分歧在于是否将invertible topological quantum field therory(TQFT) 所描述的量子态看作是长程纠缠(见表1)。两者的定义都是自洽的，这个小的分歧也不会对物理的理解造成太多的混乱。

**表1: 长程纠缠与短程纠缠两种定义对比。FQH 态/IQH 态分别代表分数/整数量子Hall 态**

| | 有分数激发的拓扑相 (如 FQH 态) | ivertible TQFT (如 IQH 态) | 对称保护拓扑相 (如 Haldane 相) | 传统对称破缺相 (如 Ising 铁磁相) |
|---|---|---|---|---|
| 纠缠类型 (Wen) | 长程纠缠 | 长程纠缠 | 短程纠缠 | 短程纠缠 |
| 纠缠类型 (Kitaev) | 长程纠缠 | 短程纠缠 | 短程纠缠 | 短程纠缠 |

我们还可以通过拓扑纠缠熵来区别具有短程纠缠和长程纠缠的量子态。通常，对于具有短程纠缠量子系统的基态，其纠缠熵满足面积率，即纠缠熵正比于界线的面积(2 维情况下即界线周长)。好比我们把量子毛衣切开，切口处剪断的短毛线的数目与切口的长度成正比。但对于具有内禀拓扑序的量子毛衣，由于存在与衣服大小尺度相当的长毛线，切口除了切断短毛线之外也必然切断长毛线，从而其纠缠熵在面积率的基础上有个修正，这个修正值即拓扑纠缠熵。修正值的大小依赖于长毛线的编织方式，也就是依赖于具体的拓扑序。短程纠缠态的拓扑纠缠熵为0，而长程纠缠态的拓扑纠缠熵是个普适的数(通常是非零的) Kitaev and Preskill [2006],Levin and Wen [2006]。

## 对称保护拓扑序的分类及发展

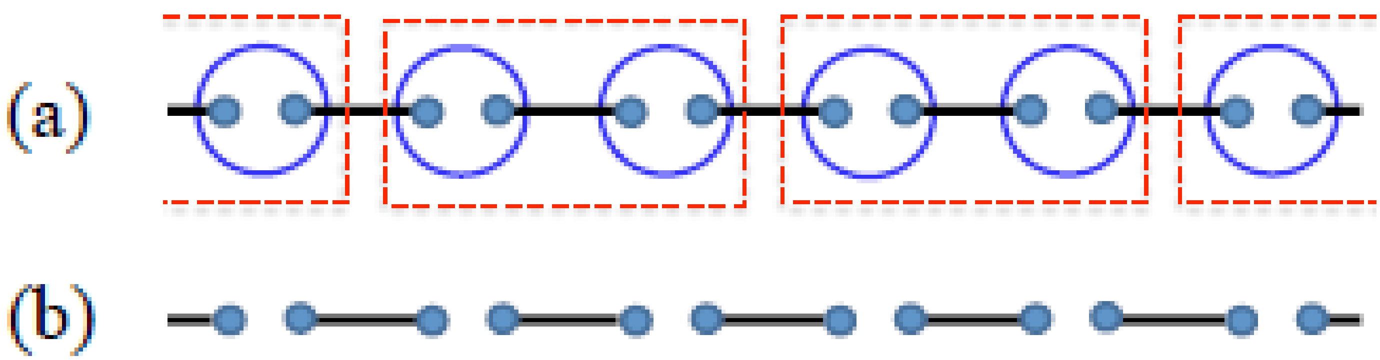



**图2: Haldane phase 的不动点波函数。(a)AKLT 波函数及其粗粒化；(b)AKLT 态不断粗粒化之后的不动点波函数，即dimer 直 积态，边界态负载对称群的投影表示。**

下面我们再回到具有短程纠缠的对称保护拓扑相(SPT 相)。除了Haldane phase 外，玻色性系统中是否存在其他的SPT 相呢？如果有，能否和自由费米系统一样，对不同的对称性的玻色性SPT 相进行分类呢？答案是肯定的。分类理论的突破口仍然是Haldane phase 。如果对Haldane phase 的基态（比如AKLT 态）不断进行粗粒化，那么最后的不动点波函数是什么样子的呢？结果是一个平凡的直积态，如图[2] 所示，其短程纠缠特性一目了然。Haldane phase 的纠缠谱是偶数重简并的，其后果是边界态存在简并而且在对称群下按投影表示变换。为了形象的理解Haldane phase 的这一特点，我们仍然用编织量子毛衣(由于Haldane phase 是一维链，这里用“量子围巾”可能更合适) 做比方。编织Haldane phase 所用的短毛线是受对称性保护的双线。双线意味着如果把这个毛衣

(或“围巾”)剪开，被剪断的短毛线总是偶数根(对应于纠缠谱的偶数重简并)，而且边界处的“线头”则代表二重简并的边界态。这一结论可以推广到其他对称性保护的1 维玻色性SPT 相。如果某个对称群不存在非平凡的投影表示，则此群不能保护非平庸的拓扑相。因此，根据对称群的投影表示的种类，我们便得到1维SPT 相的分类Chen et al. [2011a,b]。这个投影表示分类理论是对称保护拓扑相的概念提出以来，文献中第一次对一大类具有强烈相互作用的拓扑相的相进行地完整的分类，让大家对一维有能隙的系统有了完全的理解。

理论物理学家通常不满足于基于基态波函数得出的结论，而是希望能给出低能下普适的场论描述。我们在上一篇文章中提到（诺奖深度解析（之三）），具有连续自旋旋转对称性的Haldane phase 由拓扑NonlinearSigma model (NLSM) 来描述。那么，如果对称群不是连续的，与其投影表示相对应的SPT 相用什么样的场论来描述呢？这里需要涉及比较多的数学。首先，对称群的投影表示由第二群上同调（second group cohomology）来分类。第二群上同调中的基本元素是第二上闭链(2-cocycle) $\nu_2(g_i, g_j, g_k)$,可以诠释为闭合路径的Aharonov-Bohm phase 或Berry phase, 如图3 (a) 所示，因而可以用来构造拓扑项。 2-cocycle 必须满足上闭链方程 $\nu_2(g_1,g_2,g_3)\nu_2(g_0,g_1,g_3)\nu_2^{-1}(g_0,g_1,g_2)\nu_2^{-1}(g_0,g_2,g_3)=1$,该方程有一个非常漂亮的几何图像，如图3 (b) 所示，正好类比于闭合时空拓扑NLSM 中的拓扑作用量对路径积分贡献一个平凡的相位 $e^{-S_{top}}=1$。如果我们的出发点是图2(b) 中的不动点，则可以忽略系统的动力学项。和拓扑NLSM 中的 拓扑项类似，这个离散时空中的拓扑项保持系统基态的无序性和体内有能隙的激发谱，但如果系统在空间上存在边界，则会产生简并的边界态。这个边界态在对称群的作用下按照由标识2-cocycle $\nu_2(g_i, g_j, g_k)$ 的投影表示变换。

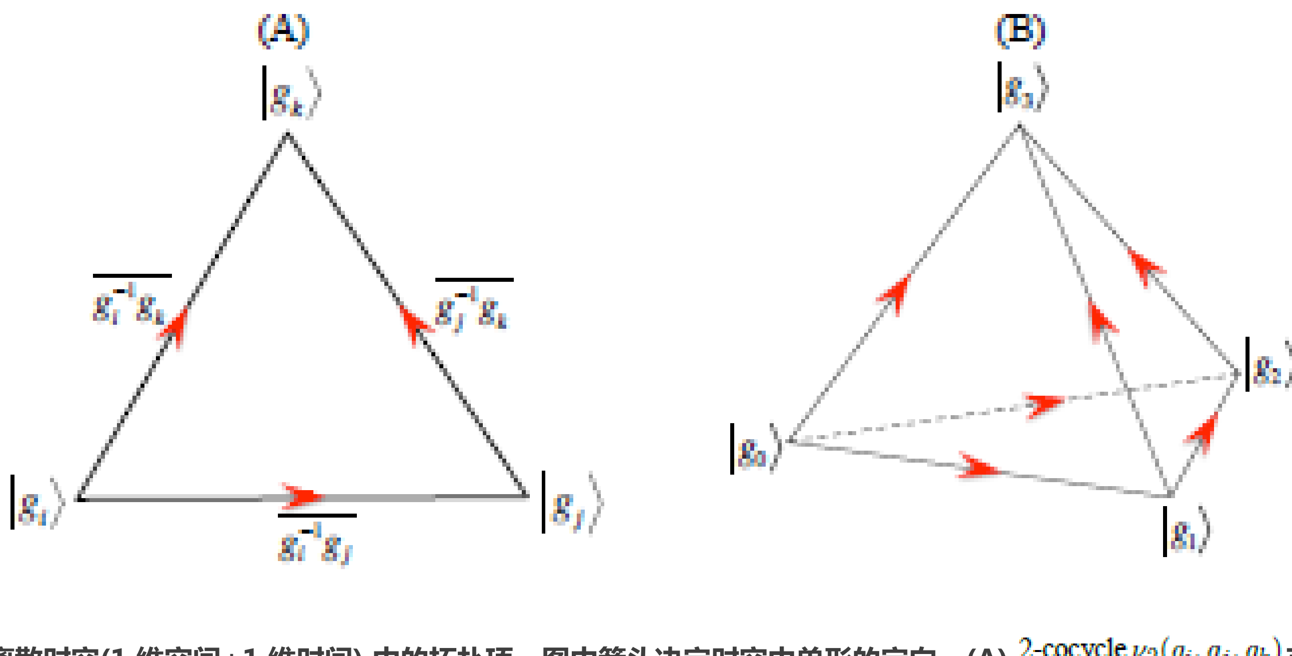



**图3: 离散时空(1 维空间+1 维时间) 中的拓扑项，图中箭头决定时空中单形的定向。(A) 2-cocycle $\nu_2(g_i, g_j, g_k)$ 可理解为Aharonov-Bohm phase 或Berry phase；(B) 最简单的闭合时空是一个四面体的表面，考虑定向后四个表面的2-cocycle 乘积量子化为1，可以理解为闭合时空中拓扑作用量对路径积分贡献一个平凡相位因子。**

因此群上同调给出了描述SPT 相的拓扑场论。但这里有一个前提，即时空都被离散化。在凝聚态体系中，空间是不连续的格点，但是时间是连续的还是离散的？这是一个古老而又深刻的问题。这个问题是否有最后答案，我们暂时不讨论，只是告诉大家，在这一个前提下，群上同调不但能自洽的解释1 维中由投影表示分类的SPT 相，而且能很自然的推广到高维，预言二维和三维空间中一大批具有相互作用的玻色性SPT 相，并能对其进行分类Chen et al. [2012, 2013]。这些SPT 相的共同特点是，基态没有对称破缺，有能隙但体内没有分数激发，但边界上如果不发生对称破缺，则具有非平凡的边界态。比如，一维SPT 的边界具有简并的边界态(空间反演对称性保护的SPT 相除外)，二维SPT 相的边界如果没有对称破缺则是无能隙的，三维SPT 相的边界如果不发生对称破缺则要么无能隙，要么具有纯二维系统无法实现的“反常”拓扑序。文献Chen et al. [2011c]中构造2 维严格可解格点模型实现了$Z_2$对称性保护的SPT 态，说明分类理论所预言的新的物质的相是真实存在的。这是2 维空间最简单SPT 态，也是文献中最早提出的不需要平移对称性保护的二维玻色性SPT 态。后来Levin and Gu [2012] 用大家更熟悉的语言解释了这个 $Z_2$SPT 态，并指出可以通过探测交换点状对称缺陷的Berry phase（即其分数统计）的方法来区分非平庸SPT 相和平庸SPT 相。玻色性SPT 相的另一个典型例子是玻色性拓扑绝缘体，即时间反演和粒子数守恒对称性的SPT 相Ye and Wen [2014], Liu et al. [2014a]。玻色型SPT 相的预言和分类是我们对物质形态的理解上的一个重要进展。

自玻色性SPT 相的group cohomology 分类理论提出之后，不同的研究组从连续场论的角度验证了分类的合理性，比如Lu and Vishwanath [2012] 从mutial Chern-Simons 场论的角度，得到了与group cohomology 一致的结论；之后Bi et al. [2015], Liu and Wen [2013] 又从拓扑NLSM 连续场论的角度得到同样的结论。数值上的研究也十分火热，人们从微观模型出发，运用各种数值计算方法，比如严格对角化Wu and Jain [2013], Regnault and Senthil [2013]，变分蒙特卡洛Liu et al. [2014b]，密度矩阵重正化群He et al. [2015] 等，研究了玻色性U(1)对称性保护的拓扑相。更加令人惊奇的是，在(2+1)d 的相互作用费米子系统中通过调节相互作用也能涌现出玻色型SPT 相，这一结论最近被大规模量子蒙特卡洛模拟所揭示He et al. [2016a], Wu et al. [2016]。

关于SPT 相的理论还在不断向前发展。人们发现三维空间中反幺正群保护的SPT 相的group cohomology 分类并不完备， Vishwanath and Senthil [2013] 发现了超越group cohomology 分类的新的相；随后Kapustin[2014] 又从cobordism 的角度给出了新的分类理论； Wen [2015] 则从时空反常和对称反常的角度提出了$G \times SO(\infty)$NLSM 分类理论；在相互作用费米性SPT 相的研究中，Gu and Wen [2014], Cheng et al. [2015], Wang et al. [2016] 提出了super-gorupcohomology 对拓扑超导相进行了分类，他们发现其中有些相互作用的费米性拓扑相是在自由费米子系统中无法实现的；基于连续场论的分析， Wang et al. [2014] 提出了3 维空间中相互作用拓扑绝缘体的分类；等等。SPT 相中的对称的反常甚至有助于我们理解宇宙中的一些深层次的奥秘，比如手征费米子的起源和新的标准模型的建立等等(见赛先生：许岑珂、文小刚，来自拓扑序的大统一)，还有Ayyar and Chandrasekharan [2016], He et al. [2016b] 最近通过量子蒙特卡洛模拟所发

现的(2+1)d 相互作用驱动费米子质量产生的新机制。对称性不仅仅使得短程纠缠态出现新的量子相，也使得长程纠缠的内禀拓扑相更加丰富。具有相同拓扑序的长程纠缠量子态在对称性作用下可能会有不同的表现，从而分属于不同的对称丰富拓扑相(SET: symmetry enriched topological phase)。SET 相是比SPT 相更加新奇的物质的形态，其研究早在自旋液体的分类理论Wen [2002] 提出时就开始了，后来Barkeshli et al. [2014] 提出G-crossed braided tensor category 对二维玻色性SPT 相和SET 相给出了统一的描述。

可以看出，关于拓扑相的研究是凝聚态物理理论发展的前沿，随着理论的深入，拓扑相与量子多体计算、量子信息和前沿数学诸多领域的深层联系正在逐步显现，一场新的凝聚态物理学甚至物理学的大发展正在蔚然成形。然而，目前实验上的进展却非常缓慢，其主要原因是实现理论上预言的拓扑相的相互作用形式太复杂，往往需要多体相互作用，超出了目前的材料生长和物性测量的操控范围。但是, 我们相信在不久的将来，这些困难会被逐步地被凝聚态实验学家或者从事量子模拟学的冷原子实验学家所克服。我们期盼看到正如拓扑绝缘体研究的高潮时期那样，实验学家、计算学家和理论学家在多体纠缠和相互作用拓扑相的研究中再次深度合作，给物理学带来新的革命，为物理学的发展史谱写更加美丽和惊心动魄的篇章。

## 拓扑相小史之年表

回顾这三十年来拓扑相的发展，其中几个时间节点伴随着重要概念的提出或者新材料的发现而呈现出拓扑相研究的高峰。作为本篇短文的结尾，我们不妨重温一下这些让人热血沸腾的时刻。

- 1980s 整数、分数量子Hall 效应相继被发现; 高温超导现象被发现
- 1983 年Haldane conjecture 被提出
- 1987 年Resonating Valence Bond 理论被提出并用来解释高温超导电子配对机制(P.W. Anderson)，从此拉开了量子自旋液体研究的序幕
- 1988 年无Landau 能级的量子Hall 效应模型被提出(Haldane)，为后来的量子反常Hall 效应和拓扑绝缘体的研究提供了理论基础( Haldane 大叔领先了整个领域近20 年!)
- 1989 年拓扑序的概念问世(文小刚)
- 1997 年(2003 年发表) 严格可解toric code 模型和拓扑量子计算的概念并提出(A. Kitaev)，凝聚态和量子信息完美联姻
- 2005 年石墨稀中的新的物态被发现(Kane and Mele)，拓扑绝缘体和Z2 拓扑不变量问世，引领了拓扑绝缘体研究的十余年的大潮；拓扑序的弦网凝聚图像问世，Levin-Wen 模型被提出
- 2006 年拓扑纠缠熵的概念被提出
- 2007 年第一个二维拓扑绝缘体材料被实现

- 2009 年自由费米子拓扑相的完整分类被提出；对称保护拓扑序的概念正式被提出
- 2010 年长程纠缠、短程纠缠、局域幺正变换的概念被提出
- 2011 年玻色性SPT 相分类理论被提出，group cohomology 这一抽象的代数渐被人所知
- 2012 年以后，SPT 相、SET 相分类理论被进一步完善并仍然在发展之中，实验上的支持除了最初的Haldane
- phase 和拓扑绝缘体之外，新的材料目前还没有取得突破…
- 2016 年Nobel 物理奖授予Thouless、Haldane、Kosterlitz, 奖励他们在拓扑相、拓扑相变方面的开拓性贡献
- 2017 年A. Kitaev 和文小刚因在拓扑序领域的非凡成就同获Buckley 奖

---

**参考文献**


Venkitesh Ayyar and Shailesh Chandrasekharan.Phys. Rev. D, 93:081701, Apr 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.93.081701.

Maissam Barkeshli, Parsa Bonderson, Meng Cheng, and Zhenghan Wang. arXiv:1410.4540 [cond-mat.str-el], 2014.

Zhen Bi, Alex Rasmussen, Kevin Slagle, and Cenke Xu. Phys. Rev. B, 91:134404, Apr 2015. doi: 10.1103/PhysRevB.91.134404.

Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 83:035107, Jan 2011a. doi: 10.1103/PhysRevB.83.035107.

Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, and Xiao-Gang Wen.Phys. Rev. B, 84:235128, Dec 2011b. doi: 10.1103/PhysRevB.84.235128.

Xie Chen, Zheng-Xin Liu, and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 84:235141, Dec 2011c. doi: 10.1103/PhysRevB.84.235141.

Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, and Xiao-Gang Wen. Science, 338:1604, 2012.

Xie Chen, Zheng-Cheng Gu, Zheng-Xin Liu, and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 87:155114, Apr 2013. doi: 10.1103/PhysRevB.87.155114.

Meng Cheng, Zhen Bi, Yi-Zhuang You, and Zheng-Cheng Gu. arXiv:1501.01313 [cond-mat.str-el], 2015.

Lukasz Fidkowski and Alexei Kitaev. Phys. Rev. B, 81:134509.

Lukasz Fidkowski and Alexei Kitaev. T. Phys. Rev. B, 83:075103.

Zheng-Cheng Gu and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 80:155131.

Zheng-Cheng Gu and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 90:115141, Sep 2014. doi: 10.1103/PhysRevB.90.115141.

Yin-Chen He, Subhro Bhattacharjee, R. Moessner, and Frank Pollmann. Phys. Rev. Lett., 115:116803, Sep 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.116803.

Yuan-Yao He, Han-Qing Wu, Yi-Zhuang You, Cenke Xu, Zi Yang Meng, and Zhong-Yi Lu.Physical Review B, 93:155150, 2016a.

Yuan-Yao He, Han-Qing Wu, Yi-Zhuang You, Cenke Xu, Zi Yang Meng, and Zhong-Yi Lu. arXiv:1603.08376 [cond-mat.str-el], 2016b.

V. Kalmeyer and R. B. Laughlin. Phys. Rev. Lett., 59:2095–2098, Nov 1987.

Anton Kapustin. arXiv: 1403.1467 [cond-mat.str-el], 2014.

Alexei Kitaev. Annals of Physics, 321(1):2 – 111, 2006. ISSN 0003-4916.

Alexei Kitaev. AIP Conference Proceedings, 1134(1), 2009.

Alexei Kitaev and John Preskill. Phys. Rev. Lett., 96:110404, Mar 2006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.110404.

A.Yu. Kitaev. Annals of Physics, 303(1):2 – 30, 2003. ISSN 0003- 4916.

Michael Levin and Zheng-Cheng Gu. Phys. Rev. B, 86:115109, Sep 2012. doi: 10.1103/PhysRevB.86.115109.

Michael Levin and Xiao-Gang Wen. Detecting topological order in a ground state wave function. Phys. Rev. Lett., 96:110405, Mar 2006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.110405.

Michael A. Levin and Xiao-Gang Wen.Phys. Rev. B, 71:045110, Jan 2005. doi: 10.1103/PhysRevB.71.045110.

Zheng-Xin Liu and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. Lett., 110:067205, Feb 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.067205.

Zheng-Xin Liu, Zheng-Cheng Gu, and Xiao-Gang Wen.Phys. Rev. Lett., 113:267206, 2014a.

Zheng-Xin Liu, Jia-Wei Mei, Peng Ye, and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 90:235146, Dec 2014b. doi: 10.1103/PhysRevB.90.235146.

Yuan-Ming Lu and Ashvin Vishwanath. Phys. Rev. B, 86:125119, Sep 2012. doi: 10.1103/PhysRevB.86.125119.

Gregory Moore and Nicholas Read. Nuclear Physics B, 360(2): 362 – 396, 1991. ISSN 0550-3213.

Frank Pollmann, Ari M. Turner, Erez Berg, and Masaki Oshikawa. Phys. Rev. B, 81:064439, Feb 2010. doi: 10.1103/PhysRevB.81.064439.

N. Regnault and T. Senthil. Phys. Rev. B, 88:161106, Oct 2013. doi: 10.1103/PhysRevB.88.161106.

Shinsei Ryu, Andreas P Schnyder, Akira Furusaki, and Andreas W W Ludwig. New Journal of Physics, 12(6):065010, 2010.

Ashvin Vishwanath and T. Senthil. Phys. Rev. X, 3:011016, Feb 2013. doi: 10.1103/PhysRevX.3.011016.

Chenjie Wang, Chien-Hung Lin, and Zheng-Cheng Gu. arXiv:1610.08478 [cond-mat.str-el], 2016.

Chong Wang, Andrew C. Potter, and T. Senthil. Science, 343(6171):629–631, 2014. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1243326.

X. G. Wen. Phys. Rev. B, 40:7387–7390, Oct 1989. doi: 10.1103/PhysRevB.40.7387.

X. G. Wen. Non-abelian statistics in the fractional quantum hall states. Phys. Rev. Lett., 66:802–805, Feb 1991. doi:10.1103/PhysRevLett.66.802.
URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.802.

X. G. Wen, Frank Wilczek, and A. Zee. Phys. Rev. B, 39:11413–11423, Jun 1989. doi: 10.1103/PhysRevB.39.11413.

Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 65:165113, Apr 2002. doi: 10.1103/ PhysRevB.65.165113.

Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 85:085103, Feb 2012. doi: 10.1103/PhysRevB.85.085103.

Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 91:205101, May 2015. doi: 10.1103/PhysRevB.91.205101.

Xiao-Gang Wen. arXiv:1610.03911 [cond-mat.str-el], 2016.

Han-Qing Wu, Yuan-Yao He, Yi-Zhuang You, Tsuneya Yoshida, Norio Kawakami, Cenke Xu, Zi Yang Meng, and Zhong- Yi Lu. Phys. Rev. B, 94: 165121, Oct 2016. doi: 10.1103/PhysRevB.94.165121.

Ying-Hai Wu and Jainendra K. Jain. Phys. Rev. B, 87:245123, Jun 2013. doi: 10.1103/PhysRevB.87.245123.

Peng Ye and Xiao-Gang Wen. Phys. Rev. B, 89:045127, Jan 2014. doi: 10.1103/PhysRevB.89.045127.

编辑：WQD

## 系列文章

（之一）Kosterlitz-Thouless相变：拓扑元激发导致的特殊相变

（之二）永远的TKNN：动量空间中的拓扑不变量

（之三）Haldane大叔的猜想

（之四）从TKNN到Z2拓扑绝缘体

（之五）凝聚态拓扑中的量子纠缠

（之六）拓扑晶体绝缘体和拓扑半金属

（番外篇）趣谈2016年诺贝尔物理学奖获得者的真功夫

---

精选留言

暗物质 3
读物理的我特想学拓扑和群论！
11月15日

姜畅 2
这篇文章的最后出现了一点小疏漏，文章结尾的年表中要更新一行，L. Berezinskii(1971年)和 J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless(1973年)提出拓扑相变，后来被称为KT相变或BKT相变，这是凝聚态物理中第一次出现的因拓扑缺陷涨落而造成的相变。
11月15日

blissone 2
拓扑相的发展史可谓是：一名对一相，一相对一法门。
11月15日

任可
多谢小编
11月20日

成蒙
to 任可：3，entanglement entropy的area law是针对具有短程相互作用的系统的基态的而言的。听做量子信息的朋友说，Hilbert空间中的一般的态，其entanglement entropy是满足volume law的。但对于目前比较热的many body localization中的系统，其激发态的entanglement entropy似乎也满足area low。有拓扑序的系统，其基态也满足area law，EE = aS+b （其中S代表边界面积，a，b都是常数）只是多了一个截距b,即拓扑纠缠熵
11月20日

作者回复
代原作者回复哒~
11月20日

e路平安

看不懂，不知道这理论有啥用。这些物质能做出来吗？

11月16日

作者回复

具有相互作用的系统的拓扑相，除了分数量子Hall态和Haldane phase在实验中观测到，Z2量子自旋液体可能是另一个可能在固体中被实现的拓扑相。其他的具有相互作用的拓扑相在固体中比较难实现，或许不久将来能在冷原子中被模拟出来。

11月20日

任可

关于integer quantum Hall是长还是短，我也一直想问。因为一方面用单电子模型就能给出Hall电导是Chern number,另一方面强关联induce的Chern-Simons theory取level=1时不也正是IQH嘛（1也是奇整数呀233）.看来此分歧在大佬们那里也存在呀

11月15日

作者回复

回复留言不能超过140字，所以第三个问题的回答见下面小编自己的留言哈

11月20日

任可

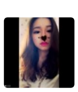
1.请教一个问题，SPTO问题一般都是单电子波函数描述的，忽略电子间interaction,Hamiltonian quadratic, 那么怎么看entanglement entropy?（看EE的话不应该至少有两个states作tensor product这样的结构吗？） 2. 文老师的string network，从这个介绍看来，和弦论真的很像啊：open string's endpoint携带gluon自由度，两个gluon形成boundstate即graviton（两个open string合为closed string）,此时gluon 自由度被禁闭. 所以这个弦网凝聚，是不是和AdS3/CFT2有什么等价性（恰好AdS3也是TQFT）。 3. 可不可以这样说，entanglement area law=locality=存在
bulk degree of freedom; breaking of area law=nonlocality=only edge degree of freedom, TQFT

11月15日

作者回复

1，自由电子的波函数不会存在拓扑纠缠熵。只有有相互作用的系统，当基态有拓扑序的时候拓扑纠缠熵才不等于0； 2，我们对AdS3不了解。但文老师的String network和超弦确实有很多相似的地方，文老师自己也曾野心勃勃的说过，两种string理论想解决的问题是一样的:-)；

11月20日



Owen

拉到了最下面看评论👀

11月15日